

Física I

Oscilações - Resolução

Questões:

Q1 - Será que a amplitude A e a constante na fase ϕ de um oscilador, podem ser determinadas, se apenas for especificada a posição no instante $t = 0$? Explique.

Q2 - Uma massa ligada a uma mola tem um movimento harmónico simples com amplitude A . Será que a energia total varia se a massa duplicar mas a amplitude se mantiver? As energias cinética e potencial dependem da massa? Explique.

Q3 - Uma massa é pendurada numa mola segundo a vertical e é posta em oscilação. Porque é que o seu movimento acaba por parar?

Q4 - Um relógio de pêndulo está atrasado. Como se deveria ajustar o comprimento do pêndulo para acertar as horas?

Problemas:

P1 - Uma partícula move-se ao longo do eixo dos x com movimento harmónico simples, tendo partido da origem no instante $t = 0$ deslocando-se para a direita. A amplitude do movimento é 2.00 cm e a frequência é 1.50 Hz.

a) Escreva a equação para o deslocamento.

b) Determine a velocidade máxima e o primeiro instante em que a partícula atinge essa velocidade; faça o mesmo para a aceleração.

c) Qual a distância total percorrida no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 1.00$ s.

a) A equação do movimento, que exprime a coordenada de posição em função do tempo, é do tipo

$$x = A \cos(\omega t + \phi),$$

em que A é a amplitude, ω é a frequência angular e ϕ a constante de fase. $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 1.50 \text{ Hz} = 9.42 \text{ rad/s}$; $A = 2.00 \text{ cm}$. Como $x(0 \text{ s}) = 0.0 \text{ cm}$, vem

$$x(0) = A \cos \phi = 0$$

e $\phi = \frac{\pi}{2}$ ou $\phi = \frac{3\pi}{2}$. A escolha entre estes dois valores para a constante de fase é determinada pela indicação de que no instante inicial, a velocidade é positiva (se para $t = 0$ a partícula se desloca para a direita, a velocidade nesse instante tem o sentido positivo dos eixo dos x e é, portanto, positiva). A velocidade, em função do tempo, é dada por

$$\begin{aligned} v &= dx/dt \\ &= -A\omega \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

e, para $t = 0$,

$$v(0) = -A\omega \sin \phi$$

Se $v(0) > 0$, então $\sin \phi < 0$ e portanto, $\phi = \frac{3}{2}\pi$. A equação do movimento é assim,

$$x = 2.00 \times \cos \left(9.42 \text{ rad/s} \times t + \frac{3}{2}\pi \right) \text{ cm.}$$

b) Como a velocidade é

$$v = (-2.00 \times 9.4) \sin \left(9.42t + \frac{3}{2}\pi \right) \text{ cm/s,}$$

o valor máximo da velocidade é

$$\begin{aligned} v_{\max} &= (2.00 \times 9.42) \text{ cm/s} \\ &= 1.88 \times 10 \text{ cm/s.} \end{aligned}$$

O 1º instante em que a partícula atinge este valor corresponde à primeira passagem pela origem com velocidade positiva (sem contar o instante inicial). Esse instante corresponde a um intervalo de tempo igual a um período, isto é,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\nu} \\ &= \frac{1}{1.5 \text{ Hz}} \\ &= 0.67 \text{ s.} \end{aligned}$$

A aceleração é

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

sendo o seu valor máximo dado por

$$\begin{aligned} a_{\max} &= A\omega^2 \\ &= (2.00 \times 9.42^2) \text{ cm/s}^2 \\ &= 1.77 \times 10^2 \text{ cm/s}^2. \end{aligned}$$

Este valor é obtido quando

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \cos \left(9.42 \text{ rad/s} \times t + \frac{3}{2}\pi \right) &= A\omega^2 \\ \cos \left(9.42 \text{ rad/s} \times t + \frac{3}{2}\pi \right) &= -1 \\ 9.42 \text{ rad/s} \times t + \frac{3}{2}\pi &= 3\pi \\ t &= \frac{1.5\pi}{9.42} \\ &= 0.50 \text{ s} \end{aligned}$$

c) Durante um período a partícula percorre uma distância igual a 4 vezes a amplitude, durante 1.0 s percorrerá

$$\begin{aligned} D &= 4A \times \frac{1}{T} \\ &= \left(4 \times 2.00 \times \frac{1}{0.67} \right) \text{ cm} \\ &= 12 \text{ cm.} \end{aligned}$$

P2 - Uma bola deixada cair de uma altura de 4.00 m colide de uma forma perfeitamente elástica com o solo. Presuma que não há perda de energia devido à resistência do ar.

a) Mostre que o movimento é periódico.

b) Determine o período do movimento.

c) O movimento é harmónico simples? Explique.

a) Na descida, e com origem do referencial no ponto em que a bola bate no solo, a equação do movimento é

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

A velocidade da bola ao atingir o solo é dada por

$$v = \sqrt{2gh}$$

O tempo de descida é dado por t_{desc} , em que

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_{\text{desc}}^2$$

ou

$$t_{\text{desc}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

A equação para a subida é

$$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

em que v é igual ao valor da velocidade da bola ao atingir o solo, isto é, $v_0 = \sqrt{2gh}$. Utilizando esta última equação, podemos obter o tempo de subida, t_{sub} :

$$h = \sqrt{2gh}t - \frac{1}{2}gt^2$$

e

$$\begin{aligned} t_{\text{sub}} &= \frac{\sqrt{2gh} \pm \sqrt{2gh - 2gh}}{g} \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_{\text{desc}} \end{aligned}$$

Para que o movimento seja efectivamente periódico é necessário que todas as suas características (neste caso, posição e velocidade) se repitam em intervalos de tempo iguais (dos quais o menor será o período). Sabemos que efectivamente isto acontece no movimento que estamos a estudar e por isso ele é periódico.

b) O tempo de subida é igual ao tempo de descida. Este resultado sugere que o período do movimento será $T = 2t_{\text{sub}}$.

c) a equação do movimento é

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{g} \\ &= m\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \end{aligned}$$

ou, com o eixo dos y dirigido para cima,

$$\begin{aligned} m\frac{d^2y}{dt^2} &= -mg \\ \frac{d^2y}{dt^2} + g &= 0 \end{aligned}$$

e o movimento *não* é harmónico simples (porque a respectiva equação não é do tipo $\frac{d^2y}{dt^2} + Cy = 0$, com $C = \text{const.}$).

P3 - Um corpo com massa 2.00 kg está ligado a uma mola e encontra-se sobre uma superfície horizontal. É necessária uma força horizontal de 20.0 N para manter o corpo em repouso quando este é puxada 0.200 m da posição de equilíbrio (a origem do eixo dos x). O corpo é largado do repouso com um deslocamento inicial $x_0 = 0.200$ m, e subseqüentemente realiza oscilações harmónicas simples. Determine:

- a) a constante de força da mola;
- b) a frequência das oscilações;
- c) a energia total do sistema;
- d) a velocidade, a aceleração, a energia cinética e a energia potencial, quando o deslocamento é igual a um-terço do seu valor máximo.

a) A constante da mola obtem-se de $F = kx$, em que F é o valor absoluto da força que um agente exterior tem de efectuar sobre a mola quando esta é puxada de x da posição de equilíbrio. Assim

$$\begin{aligned} k &= \frac{F}{x} \\ &= \frac{20.0 \text{ N}}{0.200} \\ &= 100 \text{ N/m.} \end{aligned}$$

b) A frequência das oscilações é $\nu = \omega/2\pi$, em que $\omega = \sqrt{k/m}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{100 \text{ N/m}}}{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{2.00 \text{ kg}}}{2\pi} \\ &= 1.13 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

c) A energia total do sistema é dada pela soma da energia cinética da massa com a energia potencial da mola, isto é,

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}A^2k (\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)) \\ &= \frac{1}{2}A^2k \\ &= \frac{1}{2} \times (0.200 \text{ m})^2 \times 100 \text{ N/m} \\ &= 2.00 \text{ J} \end{aligned}$$

d) A posição e a velocidade da massa são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \phi) \\ v &= -A\omega \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

No instante inicial ($t = 0$), temos $x = A$ e $v = 0$, de onde

$$\begin{aligned} A \cos \phi &= A \\ -A\omega \sin \phi &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\phi = 0 \text{ rad}$$

e a equação do movimento é

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t \\ &= (0.200 \cos 2.26\pi t) \text{ m} \end{aligned}$$

Se o deslocamento é igual a um terço do seu valor máximo então

$$\begin{aligned} \frac{0.200 \text{ m}}{3} &= 0.200 \text{ m} \times \cos 2.26\pi t \\ 2.26\pi t &= \arccos \frac{1}{3} \\ t &= 0.173 \text{ s.} \end{aligned}$$

Nesse instante a velocidade é

$$\begin{aligned} v &= -A\omega \sin \omega t \\ &= -0.200 \text{ m} \times (2.26\pi) \text{ rad/s} \times \sin [(2.26\pi) \text{ rad/s} \times 0.173 \text{ s}] \\ &= -1.34 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

e a aceleração

$$\begin{aligned} a &= -A\omega^2 \cos \omega t \\ &= -0.200 \text{ m} \times [(2.26\pi) \text{ rad/s}]^2 \cos [(2.26\pi) \text{ rad/s} \times 0.173 \text{ s}] \\ &= -3.39 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

A energia cinética é

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2} \times 2.00 \text{ kg} \times (-1.34 \text{ m/s})^2 \\ &= 1.80 \text{ J} \end{aligned}$$

e a energia potencial

$$\begin{aligned} E_P &= \frac{1}{2} \times 100 \text{ N/m} \times \left(\frac{1}{3} \times 0.200 \text{ m}\right)^2 \\ &= 0.222 \text{ J.} \end{aligned}$$

P4 - Um corpo de massa m oscila livremente estando pendurado numa mola vertical, como se mostra na figura. Quando $m = 0.810 \text{ kg}$ o período é 0.910 s . Outro corpo de massa desconhecida pendurado na mesma mola tem um período de 1.16 s . Determine:

- a constante da mola;
- a massa desconhecida.



a) Com uma massa m suspensa, a mola oscila em torno da posição de equilíbrio (obtida de $mg = ky_0$, isto é $y_0 = \frac{mg}{k}$) com frequência angular dada por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, em que k é a constante da mola. O período é, portanto, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$. A constante da mola obtem-se a partir desta última relação:

$$\begin{aligned}\sqrt{k/m} &= \frac{2\pi}{T} \\ \frac{k}{m} &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \\ k &= m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \\ &= 0.810 \text{ kg} \times \left(\frac{2\pi}{0.910 \text{ s}}\right)^2 \\ &= 38.6 \text{ N/m}.\end{aligned}$$

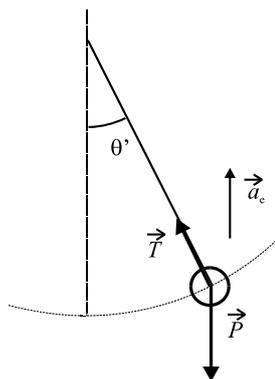
b) A massa desconhecida, m' , obtem-se agora de

$$\begin{aligned}m' &= k \left(\frac{T'}{2\pi}\right)^2 \\ &= 38.6 \text{ N/m} \times \left(\frac{1.16 \text{ s}}{2\pi}\right)^2 \\ &= 1.32 \text{ kg}.\end{aligned}$$

P5 - Um pêndulo simples tem 5.0 m de comprimento. Qual o período do movimento harmónico simples deste pêndulo se ele estiver pendurado num elevador que se desloca:

- Para cima com aceleração de módulo 5.0 m/s^2 ,
- Para baixo com aceleração de módulo 5.0 m/s^2 .

a) Considere-se a figura.



As forças que actuam no corpo são o seu peso \vec{P} e a tensão do fio \vec{T} . A equação que exprime a 2.^a lei de Newton é, neste caso,

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{a}_e),$$

em que \vec{a}' é a aceleração do corpo quando a aceleração do elevador (\vec{a}_e) é nula. Esta equação pode ser escrita na forma

$$\vec{P} + \vec{T} - m\vec{a}_e = m\vec{a}',$$

cujas componentes segundo a direcção radial (dirigida para o centro da trajectória) e segundo a direcção tangencial são

$$\begin{aligned} -mg \sin \theta' - ma_e \sin \theta' &= ma'_t \\ T - mg \cos \theta' - ma_e \cos \theta' &= ma'_n \end{aligned}$$

e obtemos

$$-m(g + a_e) \sin \theta' = m\ell \frac{d^2\theta'}{dt^2}$$

ou

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \frac{(g + a_e)}{\ell} \sin \theta' = 0.$$

Aqui, ℓ é o comprimento do pêndulo. Para valores de θ' pequenos, $\sin \theta' \simeq \theta'$ e atingimos uma equação de oscilador harmónico simples

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \frac{(g + a_e)}{\ell} \theta' = 0.$$

A frequência angular da oscilação será

$$\omega = \sqrt{\frac{(g + a_e)}{\ell}}$$

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g'}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g + a_e}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{5.0 \text{ m}}{(10 + 5) \text{ m/s}^2}} \\ &= 3.63 \text{ s.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g''}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g - a_e}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{5.0 \text{ m}}{(10 - 5) \text{ m/s}^2}} \\ &= 6.3 \text{ s.} \end{aligned}$$

P6 - A roda de uma balança de relógio tem um período de oscilação de 0.250 s. A roda tem massa de 20.0 g concentrada num aro com raio 0.500 cm. Determine:

a) o momento de inércia da roda;

O momento de inércia da roda é

$$\begin{aligned} I &= MR^2 \\ &= 2.0 \times 10^{-2} \text{ kg} \times (5.00 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \\ &= 5.0 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

b) a constante de torção da mola associada.

Utilizamos a equação

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathcal{K}\theta,$$

em que \mathcal{K} é a constante de torção da mola associada. A expressão da frequência angular do movimento é

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{I}},$$

pelo que o período é

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mathcal{K}}}.$$

A constante de torção é, então,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{4\pi^2 I}{T^2} \\ &= \frac{4\pi^2 5.0 \times 10^{-7} \text{ kg m}^2}{(0.250 \text{ s})^2} \\ &= 3.16 \times 10^{-4} \text{ N m} \end{aligned}$$